Kapitel 9.7 - Aufgaben

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow G_f$ s.m.f

$\Rightarrow f^{-1}$ existiert

f^{-1} bestimmen

$$y = 1 + \frac{1}{x}$$

$$y - 1 = \frac{1}{x}$$

$$yx - x = 1 \Rightarrow x \cdot (y-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$$

- Ableitung mit Quotientenregel:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{(x-1)\cdot 0 - 1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

✓

- Ableitung mit neuer Formel:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{-\frac{1}{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}} = -\frac{1}{\frac{1}{\frac{1^2}{(x-1)^2}}} = -\frac{1}{\frac{1\cdot(x-1)^2}{1^2}} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Division durch einen Bruch entspricht der Multiplikation mit dem Kehrbruch

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \quad \text{mit } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Setze $f^{-1}(x)$ für x ein!

b) $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{x\cdot(-1)-(1-x)\cdot 1}{x^2} = \frac{-x-1+x}{x^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$\Rightarrow$ G_f ist s.m. f

$\Rightarrow$ f^{-1} existiert

f^{-1} bestimmen:

$$y = \frac{1-x}{x}$$

$$xy = 1-x$$

$$xy + x = 1 \Rightarrow x\cdot(y+1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y+1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$$

- Ableitung mit der Quotientenregel:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{(x+1)\cdot 0 - 1\cdot 1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

- Ableitung mit neuer Formel:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\frac{1}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}} = -\frac{1}{\frac{1}{\frac{1^2}{(x+1)^2}}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{1\cdot(x+1)^2}{1^2}} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{mit } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Setze $f^{-1}(x)$ für x ein!

c) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+1)^2 - 3 \qquad D_f = [-1; 3]$

$f'(x) = x+1 > 0 \Rightarrow G_f$ ist s.m.d

$\Rightarrow f^{-1}$ existiert

f^{-1} bestimmen:

$$y = \frac{1}{2}\cdot(x+1)^2 - 3$$

$$2y + 6 = (x+1)^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{2y+6} = |x+1|$$

Betragsstriche können weggelassen werden, da $x+1>0$ für $x \in D_f$!

$$\sqrt{2y+6} - 1 = x$$

$$\Rightarrow \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{2x+6} - 1$$

- Ableitung mittels Summen-, Wurzel- u. Kettenregel:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2x-6}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-6}}$$

- Ableitung mit neuer Formel:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+6} - 1 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$$

$$\downarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

mit $f'(x) = x+1$

Setze $f^{-1}(x)$ für x ein!