9.8 Aufgaben

a) $f(x) = 3\sqrt{x-1}$; $D_f = [1; 10]$

$W_f = [0; 9]$

Nst: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

S_y existiert nicht, da $x - 1 < 0$ für $x = 0$!

$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x-1}} > 0 \Rightarrow G_f$ s.m.s

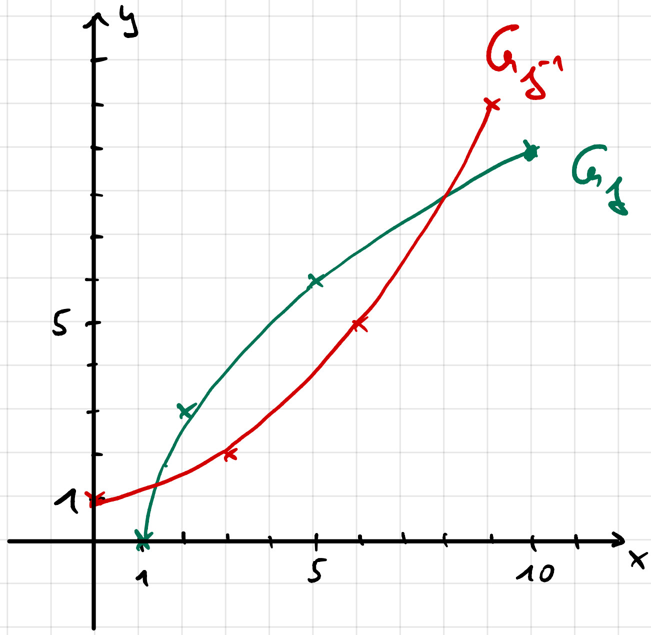
$\Rightarrow f^{-1}$ existiert

<u>f^{-1} bestimmen:</u>

$y = 3 \cdot \sqrt{x-1}$

$\frac{y}{3} = \sqrt{x-1} \quad | \uparrow^2$

$\frac{1}{9} y^2 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{9} x^2 + 1$



b) $f(x) = 2 - \sqrt{12-2x}$

Def.-Menge: $12 - 2x \geq 0 \rightarrow x \leq 6 \Rightarrow \mathbb{D}_f =]-\infty; 6]$

Nst.: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \underbrace{\sqrt{12-2x}}_{} = 0 \Rightarrow x_1 = 4$

Muss den Wert 4 haben!

$S_y(0|\underbrace{-1{,}5}_{})$

gerundeter Wert!

$\mathbb{W}_f =]-\infty; 2]$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{12-2x}} \cdot (-2) = \frac{1}{\sqrt{12-2x}} > 0$$

$\Rightarrow G_f$ ist s.m.s

$\Rightarrow f^{-1}$ existiert!

f^{-1} bestimmen:

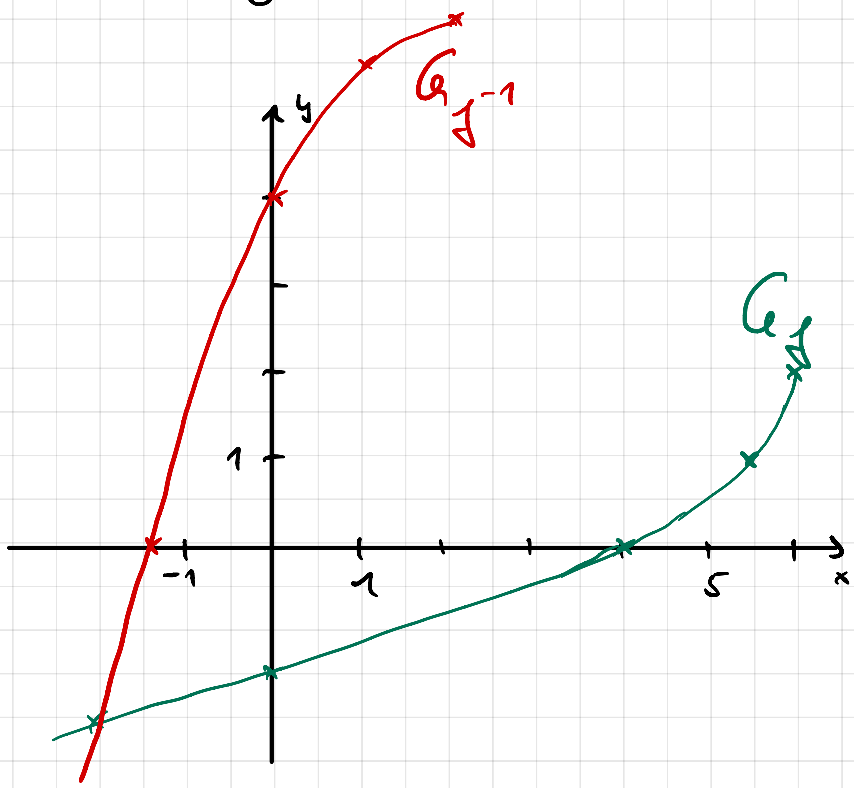
$$y = 2 - \sqrt{12-2x}$$

$$y + 2 = \sqrt{12-2x} \quad | \uparrow 2$$

$$y^2 + 4x + 4 = 12 - 2x \quad | -12$$

$$y^2 + 4x - 8 = -2x$$

$$\Longrightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$$



c) $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ mit $D_f =]-\infty; 4]$

Nst.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x(8-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\boxed{x_2 = 8} \notin D_f$

$S_y(0|0)$

$f'(x) = 2 - 0{,}5x \geq 0$ für $x \in D_f \Rightarrow G_f$ s.m.s

$\Rightarrow f^{-1}$ existiert!

<u>f^{-1} bestimmen:</u>

$$y = 2x - \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x + y = 0$$

$$\Rightarrow x_{1|2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-y}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x_{1|2} = 4 \pm 2\sqrt{4-y}$$

Frage: können beide Vorzeichen zutreffen oder kann ein Vorzeichen ausgeschlossen werden?

$\Rightarrow$ Ein Blick auf die Def.-Menge $D_f =]-\infty; 4]$ liefert das Ergebnis!

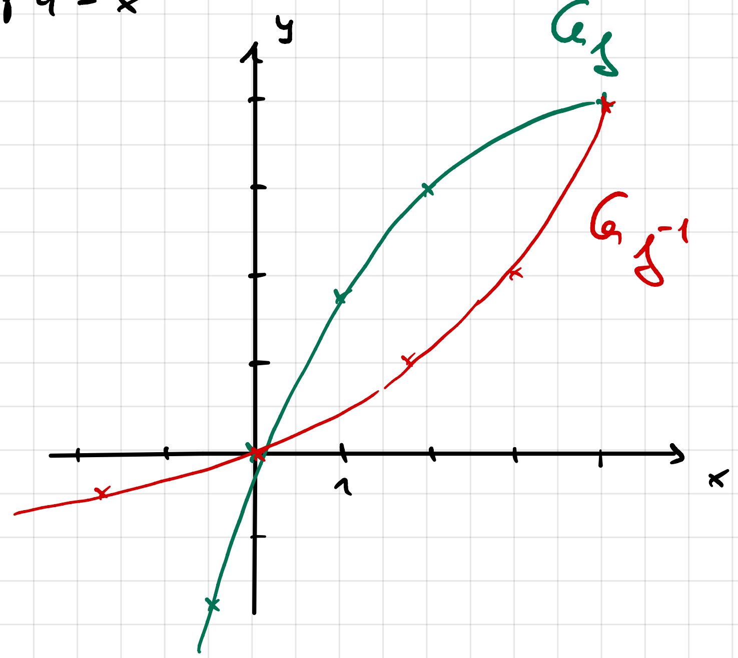
$\Rightarrow$ Es muss $x \leq 4$ sein!

Lösung:

$$x = 4 - 2\sqrt{4-y}$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(x) = 4 - 2\sqrt{4-x}$$



d) $f(x) = x^2 - 2x + 4 \qquad D_f =]-1; 1]$

Nst.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$ ↯ keine Lsg.

$S_y(0|4)$

$f'(x) = 2x - 2 \leq 0$ für $x \in D_f \Rightarrow G_f$ s.m.f

$\Downarrow \qquad \Rightarrow f^{-1}$ existiert!

$W_f = [3; 7[$

f^{-1} bestimmen:

$y = x^2 - 2x + 4$

$x^2 - 2x + 4 - y = 0$

4 ausklammern

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(4-y)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot (1 - 1 \cdot (4-y))}}{2}$

Teilweise radizieren

$= \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - 4 + y}}{2}$

$= 1 \pm \sqrt{y - 3}$

$x \in [-1; 1]$

$\Rightarrow$ Das "$-$"-Zeichen stimmt!

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x - 3}$