Übung zu e-Funktion

1. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x} - e^{-x} = (x^2-1)\cdot e^{-x}$

Nst.: $f(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2-1)}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$ ①

Anmerkung
$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ größer als Null!

② Bestimme also Nullstellen von

$x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = +1$

$S_y(0|-1)$

Verhalten an den Grenzen des Def.-Bereichs:

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x^2-1)}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} \overset{\text{"}\infty^2\text{"}}{=} +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x^2-1)}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \overset{\text{"}\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{e^x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} 0^+$$

keine eindeutige Aussage möglich!

"Exponentielles Wachstum im Nenner schlägt quadratisches Wachstum im Zähler"

x-Achse ist Asymptote für $x \to +\infty$!

Anmerkung
Bestimme Grenzwerte mit der faktorisierten Form!

Extremstellen und Monotoniebetrachtung:

$f(x) = \underbrace{(x^2-1)}_{u}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{v}$ $\leftrightarrow$ Ableitung mit Produktregel: $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

$$f'(x) = 2x\cdot e^{-x} + (x^2-1)\cdot \underbrace{e^{-x}\cdot(-1)}_{\text{Kettenregel für } (e^{-x})'} = -e^{-x}(x^2-2x-1)$$

Extremstellen:

$$f'(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{<0}\underbrace{(x^2-2x-1)}_{\text{Setze } = 0!} \Rightarrow x_{3/4} = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow E_1(\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\approx -0{,}41} | \approx -1{,}25)$ $E_2(\underbrace{1+\sqrt{2}}_{\approx 2{,}41} | \approx 0{,}43)$

Monotoniebetrachtung

$f'(-1)<0$		$f'(0)>0$		$f'(3)<0$
$\searrow$	$1-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$1+\sqrt{2}$	$\searrow$
G_f s.m.f		G_f s.m.s		G_f s.m.f

Min $(-0{,}41|-1{,}25)$ Max $(2{,}14|0{,}43)$

"Zeichnung"