Übung zu Vorbereitung auf die SA – Lösungen

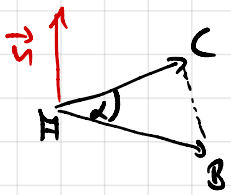
1. $A(1|2|3)$; $B(0|6|5)$; $C(-2|3|0)$; $D(0|-2|4)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.

a) $$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \circ \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{19}} = \frac{3+4-6}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{19}}$$

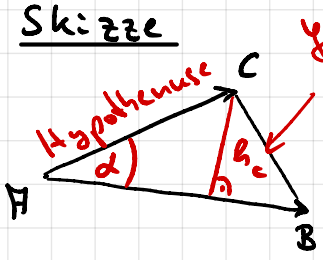
$$= \frac{1}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{19}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 87{,}13^\circ}$$



b) $$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-2 \\ -6-3 \\ -1+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{196+81+121} = \sqrt{398} \approx \underline{19{,}95 \text{ LE}}$$

c) Skizze



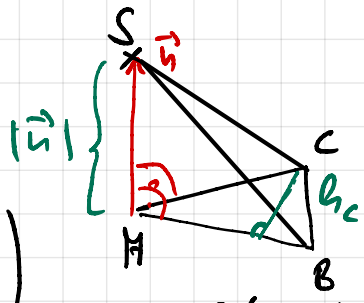
$|\vec{AB}| = \sqrt{21}$; $|\vec{AC}| = \sqrt{19}$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{h_c}{|\vec{AC}|}$$

$$\Rightarrow h_c = \sin 87{,}13^\circ \cdot \sqrt{19} = \underline{4{,}35 \text{ LE}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{21} \cdot 4{,}35 = \underline{9{,}97 \text{ FE}}$$

d) $\vec{HS} = \vec{n} = \begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow$ Verschiebe $H(1|2|3)$ um $\begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $S(-13|-7|14)$

oder: $\vec{n} = \vec{HS} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$

Spitze - Fuß = $\vec{n}$; Fuß + Verschiebung

$$V_{Pyr.} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot h_c}_{G} \cdot |\vec{n}|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{21} \cdot 4{,}35 \cdot \sqrt{398} = \underline{66{,}28 \text{ VE}}$$

3. $\begin{pmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = -10 + 0{,}5x - 6 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow 0{,}5x = 16 \Rightarrow \underline{x = 32}$

4. $A(2|-1|0)$, $B(6|3|-2)$, $H(4|1|8)$

a) Idee: Die Verschiebung von A nach B ($\vec{AB}$) muss der Verschiebung von H nach G entsprechen, da ein Würfel vorliegt

$$\Rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{HG} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} g_1 = 8 \\ g_2 = 5 \\ g_3 = 6 \end{matrix}$$

Spitze - Fuß

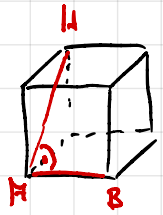
$\Rightarrow G(8|5|6)$

oder: Verschiebe $H(4|1|8)$ um $\vec{H} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (vgl. H. 2d)

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow G(8|5|6)$$

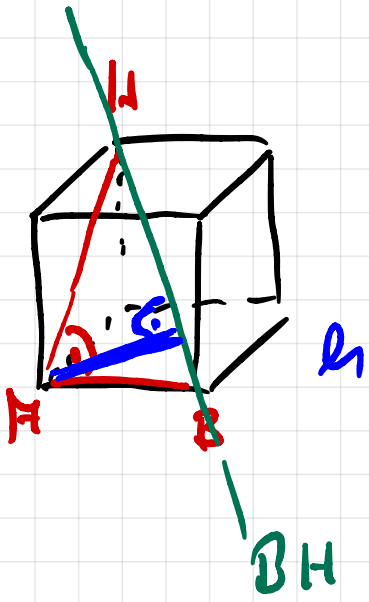
b) z.Z.: $\vec{HB} \circ \vec{HH} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 + 8 - 16 = 0$

$\Rightarrow$ Rechter Winkel an der Ecke H.

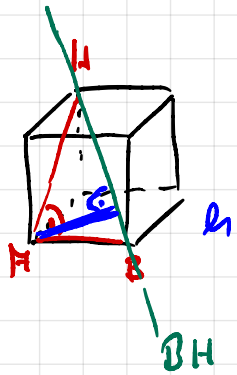


c) Lösung mit der Fläche des Dreiecks ABH.

Die Höhe h steht senkrecht auf der Geraden BH und deren Länge bestimmt daher den Abstand von A zu BH!



c) Flächenberechnung auf zwei Arten führt zum Ziel:



$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AH}|$$ da rechter Winkel am Punkt A!

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{BH}| \cdot h$$

↳ Längen der Vektoren berechnen → Einsetzen → nach h auflösen

$$|\vec{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16+4} = 6 \text{ LE}$$

$$|\vec{AH}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+64} = 6\sqrt{2} \text{ LE}$$

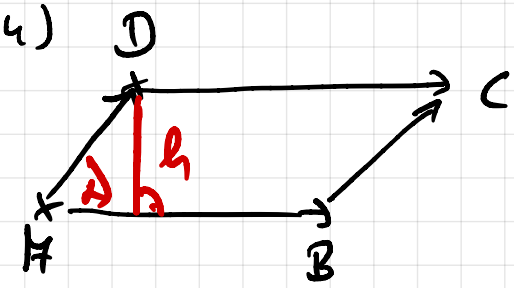
$$|\vec{BH}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+100} = 6\sqrt{3} \text{ LE}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AH}| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \text{ FE}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{BH}| \cdot h = 18\sqrt{2} \Rightarrow h = \frac{18\sqrt{2} \cdot 2}{6\sqrt{3}} = \underline{\underline{2\sqrt{6}}} \text{ LE}$$

⇒ Der Abstand von A zu Geraden BH beträgt $2\sqrt{6}$ LE!

5. $A(1|1|-2)$; $B(3|3|-3)$ $D(3|0|-4)$



a) $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{BC} \Rightarrow C(5|2|-5)$

b) $|\vec{AD}| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u = 4 \cdot 3 = 12$ LE

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{3 \cdot 3} = \frac{4-2+2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha \approx 63{,}61°$$

c) $$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{h}{|\vec{AD}|}$$

$$h = |\vec{AD}| \cdot \sin\alpha = 3 \cdot \sin 63{,}61° = 2{,}69 \text{ LE}$$

$$A_p = g \cdot h = |\vec{AB}| \cdot 2{,}69 = 3 \cdot 2{,}69 = 8{,}06 \text{ FE}$$

6, $H(2|3|-1)$ $B(3|5|1)$ $C(5|6|-1)$

a) $\vec{HB} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{HB}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ LE

$\vec{BC} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{4+1+4} = 3$ LE

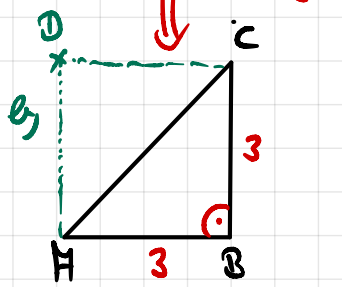
Schenkel [HB] und [BC] sind gleich lang!

$\vec{BC} \circ \vec{BH} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix} = -2-2+4 = 0$

$\Rightarrow \vec{BC} \perp \vec{BH}$

Folgenden Nachweis haben wir geführt

gleichschenklig rechtwinklig



$\Rightarrow$ Rechter Winkel bei B!

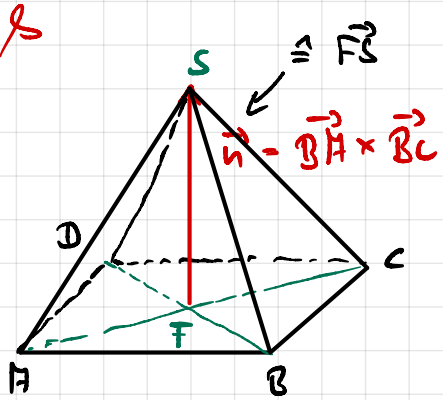
b) $\vec{BC} = \vec{HD} \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow D(4|4|-3)$

Spitze - Fuß

c) $\vec{HF} = \frac{1}{2} \cdot \vec{HC}$

$\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow F(3{,}5|4{,}5|-1)$



$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+2\\-4-2\\-1+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}; |\vec{n}| = 9$

$\vec{FS} = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3{,}5\\4{,}5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow S(9{,}5|-1{,}5|2)$

d) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 = 27$ VE