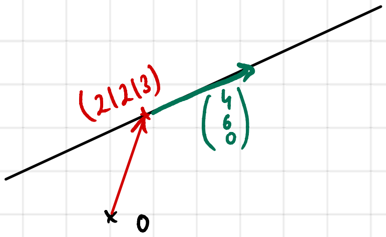
Aufgabe 4:

Die Flugbahnen der Flugzeuge sind gegeben durch

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 5{,}6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t > 0$$

a)



In jeder Minute ändert das Flugzeug A seine Position um den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D.h. es bewegt sich in jeder Minute genau um die Länge des Richtungsvektors weiter.

$\Rightarrow$ pro Minute legt es die Strecke $\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+36+1} = \sqrt{53} \approx 7{,}28$ zurück!

$\Rightarrow$ Damit beträgt die Fluggeschwindigkeit:

$$7{,}28 \ \frac{km}{min} \xrightarrow{\cdot 60} 436{,}8 \ \frac{km}{h} \xrightarrow{: 3{,}6} \approx 121{,}3 \ \frac{m}{s}$$

Die x_3-Koordinate gibt das Steigungsverhalten der Flugzeuge an. Das Flugzeug A steigt also, während Flugzeug B auf gleichbleibender Höhe fliegt.

b) Sind die Flugbahnen nicht senkrecht zueinander, dann stehen auch die Richtungsvektoren nicht senkrecht zueinander.

> Wir wissen:
> Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ stehen senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Vektoren null ist.
>
> $$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \circ \vec{v} = 0$$

Gemäß der Aufgabenstellung müssen wir zeigen, dass das Skalarprodukt der Richtungsvektoren nicht null ist!

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 12 + 24 + 0 \neq 0 \Rightarrow \text{Die Flugbahnen stehen nicht senkrecht aufeinander!}$$

c) Wir müssen die Lagebeziehung der beiden Flugbahnen grundlegend untersuchen. D.h. es interessiert nicht die Position nach einer gemeinsamen Zeit t. Daher müssen unterschiedliche Parameter, z.B. t_A und t_B zur Untersuchung verwendet werden.

Die Lagebeziehung erhalten wir wieder durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 5{,}6 \\ 5 \end{pmatrix} + t_B \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 2 + 4t_A = 3{,}7 + 3t_B \\ \text{II)} \quad & 2 + 6t_A = 5{,}6 + 4t_B \\ \text{III)} \quad & 3 + t_A = 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \boxed{t_A = 2} \text{ in II)}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + 12 = 5{,}6 + 4t_B \quad \Rightarrow \boxed{t_B = 2{,}1}$$

Prüfe mit I): $2 + 8 = 3{,}7 + 3 \cdot 2{,}1$ ✓

$\Rightarrow$ Die Flugbahnen schneiden sich!

$\Rightarrow$ Einsetzen von $t_A = 2$ in Gleichung A oder $t_B = 2{,}1$ in Gleichung B bestimmt den Schnittpunkt S.

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(10|14|5)$$

$\Rightarrow$ Die Flugbahnen schneiden sich im Punkt $S(10|14|5)$.

d) Aus Teilaufgabe c) wissen wir, dass das Flugzeug A nach $t_A = 2{,}0$ min und das Flugzeug B nach $t_B = 2{,}1$ min am Schnittpunkt $S(10|14|5)$ zeitlich versetzt eintreffen.

$\Rightarrow$ Es besteht daher keine Gefahr einer Kollision!

e) Zunächst berechnet man den Zeitpunkt t, zu dem das Flugzeug A am Ort P(22|32|8) ist.

⇒ Punktprobe mit Geradengleichung A:

$$\begin{pmatrix}22\\32\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\rightarrow t=5\\ \rightarrow t=5\\ \rightarrow t=5\end{matrix}$$

⇒ Nach 5 min befindet sich das Flugzeug A am Ort P.

⇒ Einsetzen von t = 5 in die Gleichung B gibt den Ort Q vom Flugzeug B.

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix}3{,}7\\5{,}6\\5\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18{,}7\\25{,}6\\5\end{pmatrix}$$

⇒ Der Abstand beider Flugzeuge nach t = 5 min ergibt sich durch den Abstand der Punkte P und Q

$$\Rightarrow \quad |\vec{PQ}| = \left|\begin{pmatrix}-3{,}3\\-6{,}4\\-3\end{pmatrix}\right| \approx \underline{7{,}8\text{ km}}$$

f) Mit Hilfe einer Geradengleichung können wir alle möglichen Punkte auf der entsprechenden Geraden berechnen.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+4t\\2+6t\\3+t\end{pmatrix}$$

Diese Darstellung wird als allgemeiner Geradenpunkt bezeichnet.

Durch Einsetzen unterschiedlicher Werte für t erhalten wir verschiedene Punkte

Die Berechnung der Geradenpunkte kann als ein Vektor umgeschrieben werden!

⇒ Entsprechend erhalten wir den allgemeinen Geradenpunkt der Geraden B:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix}3{,}7+3t\\5{,}6+4t\\5\end{pmatrix}$$

Abstandsberechnung mit den allg. Geradenpunkten:

Zum Zeitpunkt t befindet sich das Flugzeug A am Ort $A(2+4t \mid 2+6t \mid 3+t)$ und Flugzeug B an $B(3{,}7+3t \mid 5{,}6+4t \mid 5)$. Den Abstand erhalten wir durch die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 3{,}7+3t \\ 5{,}6+4t \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-4t \\ 2+6t \\ 3+t \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1{,}7-t \\ 3{,}6-2t \\ 2-t \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(1{,}7-t)^2 + (3{,}6-2t)^2 + (2-t)^2}$$

$$= \sqrt{19{,}85 - 21{,}8t + 6t^2}$$

$\Rightarrow$ Der Abstand d ist also abhängig von t

$$\Rightarrow \quad d(t) = \sqrt{19{,}85 - 21{,}8t + 6t^2}$$

$\Rightarrow$ Wir fassen den Abstand als Funktion $d(t)$ auf.

Gesucht ist in unserem Fall der Zeitpunkt zu dem $d(t)$ einen minimalen Wert liefert, also das Minimum der Funktion $d(t)$.

Die Wurzel liefert einen minimalen Wert, wenn die Parabel im Argument der Wurzel ein Minimum hat.

$$\Rightarrow \left(6t^2 - 21{,}8t + 19{,}85\right)' = 12t - 21{,}8 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad t \approx 1{,}81\overline{6}$$

$$\Rightarrow \quad d(1{,}81\overline{6}) \approx 0{,}22$$

Nach $t = 1{,}81\overline{6}$ min ≈ 109 s haben die Flugzeuge den geringsten Abstand von etwa 0,22 km.