

Aufgabe 5:

a) Die Geschwindigkeit ergibt sich durch den Betrag des Richtungsvektors der Geraden g_1 .

$$\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 144 + 0,09} = \sqrt{160,09} \approx 12,65$$

$$v = 12,65 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 759 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Höhe des Flugzeugs ergibt sich durch die x_3 -Koordinate der Flugbahn g_1 :

$$3,4 + t \cdot 0,3 = 4,9 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow \text{Das Flugzeug } F_1 \text{ ist nach 5 min auf einer Höhe von 4,9 km.}$$



Flugbahn von Flugzeug F_2 :

Zeitpunkt: 14:05 Uhr

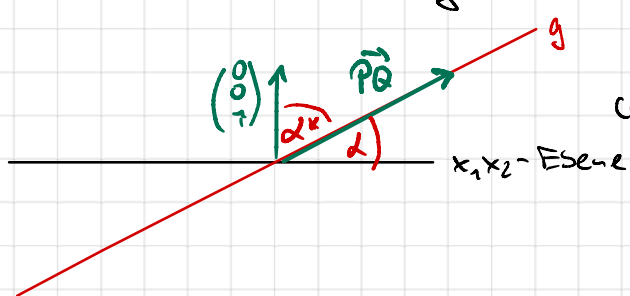
Das Flugzeug F_2 ist um 14:00 Uhr am Punkt $P(-17|54|3,2)$ und um 14:03 Uhr am Punkt $Q(1|36|3,8)$.

Berechnung der Flugbahn g_2 :

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Deg pro Minute $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

Der Winkel mit dem das Flugzeug steigt, entspricht dem Winkel zwischen der Geraden g_2 und der x_1x_2 -Ebene. Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der x_1x_2 -Ebene.



$$\cos \alpha^* = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0,2}{1 \cdot \sqrt{74,04}} \Rightarrow \alpha^* = 88,65^\circ$$

$\Rightarrow$ Das Flugzeug steigt etwa mit $\alpha = 90^\circ - \alpha^* = 1,35^\circ$

b) Schnittpunkte der Flugbahnen

$$g_1 = g_2$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\text{I,} \quad 15 - 4t_1 = -17 + 6t_2$$

$$\text{II,} \quad 6 + 12t_1 = 54 - 6t_2$$

$$\text{III,} \quad 3,4 + 0,3t_1 = 3,2 + 0,2t_2$$

$$\text{I+II,} \quad 21 + 8t_1 = 37 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ in I,} \Rightarrow t_2 = 4$$

$$\Rightarrow \text{Prüfe III,} \quad 3,4 + 0,3 \cdot 2 = 3,2 + 0,2 \cdot 4 \quad \checkmark$$

Der Schnittpunkt S der beiden Flugbahnen:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S(7 | 30 | 4)$$

Prüfung der Sicherheitsbedingung:

- Das Flugzeug F_1 ist nach $t_1 = 2$ min am Punkt S
- und das Flugzeug F_2 nach $t_2 = 4$ min.

$\Rightarrow$ Die Flugzeuge passieren im Abstand von 2 min den Schnittpunkt.

Die Sicherheitsbedingung ist erfüllt!

c) Der Ballon befindet sich am Ort $B(6|43|4,3)$.

Lösungsstrategie: Allgemeines Geradenpunkt

In Abhängigkeit von der Zeit t ändert sich für beide Flugzeuge die jeweilige Position. Diese Positionen können aus der Geradengleichung zum jeweiligen Punkt (in Abhängigkeit von t) umgeschrieben werden:

$$F_1: g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-4t \\ 6+12t \\ 3,4+0,3t \end{pmatrix} = \vec{F}_1$$

$$F_2: g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17+6t \\ 54-6t \\ 3,2+0,2t \end{pmatrix} = \vec{F}_2$$

Gesucht ist der Zeitpunkt t_0 , zu dem beide Flugzeuge F_1 u. F_2 von Ballon B gleich weit entfernt sind, d.h.:

$$|\vec{BF}_1| = |\vec{BF}_2|$$

$$\left| \begin{pmatrix} 15-4t-6 \\ 6+12t-43 \\ 3,4+0,3t-4,3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -17+6t-6 \\ 54-6t-43 \\ 3,2+0,2t-4,3 \end{pmatrix} \right|$$

$$\left| \begin{pmatrix} 9-4t \\ -37+12t \\ -0,9+0,3t \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -23+6t \\ 11-6t \\ -1,1+0,2t \end{pmatrix} \right|$$

$$\sqrt{(9-4t)^2 + (-37+12t)^2 + (-0,9+0,3t)^2} = \sqrt{(-23+6t)^2 + (11-6t)^2 + (-1,1+0,2t)^2}$$

$$1450,81 - 960,54t + 160,09t^2 = 651,21 - 408,44t + 72,04t^2$$

$$88,05t^2 - 552,1t + 799,6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{552,1 \pm \sqrt{552,1^2 - 4 \cdot 88,05 \cdot 799,6}}{2 \cdot 88,05} = \frac{552,1 \pm 152,3}{176,1}$$

$$t_{01} = 2,27 \quad \text{mit} \quad |\vec{BF}_1| = |\vec{BF}_2| = 9,76 \text{ [km]}$$

$$t_{02} = 4 \quad \text{mit} \quad |\vec{BF}_1| = |\vec{BF}_2| = 13,04 \text{ [km]}$$

Die beiden Flugzeuge haben nach etwa 2,27 Minuten und nach 4 Minuten nach Beginn der Beobachtung den selben Abstand zum Ballon!