



1.2 Gegenseitige Lage von Geraden im Raum

Berechnung für den Fall, dass die Geraden nicht parallel sind!

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \quad \text{z.B.: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} \quad \text{z.B.: } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Setze beide Gleichungen gleich:

$$\vec{a} + t \cdot \vec{u} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Lösung des Gleichungssystems:

$$\text{I) } 9 + 2t = 6 + 1s$$

$$\text{II) } 5 + 1t = 3 \quad \Rightarrow t = -2 \text{ in I) einsetzen!}$$

$$\text{II) } 0 - 2t = 1 - 3s$$

$$\Rightarrow 9 + 2 \cdot (-2) = 6 + s \Rightarrow s = -1$$

Aus jeweils zwei Gleichungen lassen sich passende Werte für die Parameter bestimmen. Es **muss** jedoch überprüft werden, ob diese beiden Werte auch die dritte Gleichung erfüllen.

$$\Rightarrow 0 - 2 \cdot (-2) = 1 - 3 \cdot (-1) \quad \checkmark \text{ Passt!}$$

D.h. die beiden Geraden g und h schneiden sich in einem Punkt. Setzt man nun t in die Gleichung der Gerade g ein so erhält man den gemeinsamen Schnittpunkt S:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Punkt S (5 | 3 | 4) ist der Schnittpunkt der Geraden g und h.

Erfüllen die berechneten Parameter die dritte Gleichung nicht, so wären beide Geraden zueinander windschief!