WGS

Punkte, Geraden und Ebenen

Lagebziehung, Schnittpunkte, Schnittgeraden und Schnittwinkel

---

Aufgabe:

Gegeben sind die Punkte $A(-1|1|1)$, $B(0|3|1)$, $C(1|2|2)$ und $Q(-4|5|7)$.

Die Punkte A, B und C legen eine Ebene E fest.

Die Ebene E wird durch die Gleichung $PF(F): \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Gerade g durch $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $r, s, \mu \in R$ festgelegt.

a) Gib die Ebene in Normalenform an.
b) Prüfe die gegenseitige Lage der Ebenen E und F. Bestimme gegebenenfalls die Schnittgerade s und den Schnittwinkel α .
c) Prüfe die jeweils paarweise die gegenseitige Lage des Punktes $Q(-4|5|7)$, der Ebene E und der Geraden g.
d) Bestimme den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E.
e) Bestimme den Abstand des Punktes Q von der Ebene E.
f) Berechne die senkrechte Projektion p der Geraden g in die Ebene E den Spiegelpunkt Q' von Q an der Ebene E und den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta\, SQ'Q$.

Lösung:

a) Gib die Ebene E in Normalenform an.

$$PF(E): \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k, l \in R$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow NF(E): \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Rightarrow KF(E): -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 6 = 0$$

b) Prüfe die gegenseitige Lage der Ebenen E und F. Bestimme gegebenenfalls die Schnittgerade s und den Schnittwinkel α .

Lageprüfung:

Setze *„allgemeinen Ebenenpunkt von F"* $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1-s \\ 5+3r+2s \\ 1-r+s \end{pmatrix}$ in die Ebene E ein:

$$-2(1-s) + (5+3r+2s) + 3(-1-r+s) - 6 = 0$$
$$-2 + 2s + 5 + 3r + 2s + 3 - 3r + 3s - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \quad 7s = 0 \quad \Rightarrow \boxed{s = 0}$$

Ergebnis:

Der Einsetzvorgang prüft, ob es gemeinsame Punkte zwischen beiden Ebenen gibt. Wir stellen fest, dass die entstandene Gleichung für $s = 0$ wahre Aussage gibt und damit eine Lösung existiert. Es gibt also eine Schnittgerade!

Schnittgerade:

Die Schnittgerade erhalten wir durch Einsetzen von $s = 0$ in $PF(F)$:

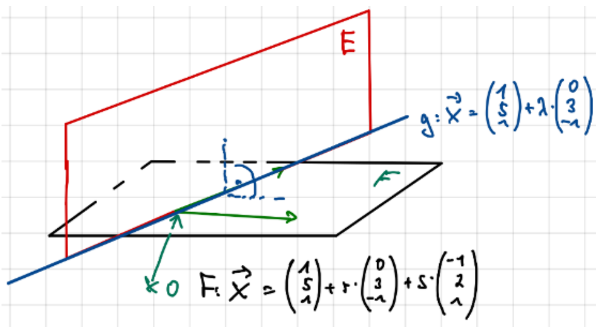
$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in R$$

Schnittwinkel:

Winkel zw. den Normalenvektoren: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-10+1+9|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{0}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90$$

Die beiden Ebenen stehen senkrecht aufeinander!



c) Prüfe die jeweils paarweise die gegenseitige Lage des Punktes $Q(-4|5|7)$, der Ebene E und der Geraden g.

Liegt Q in g? $\Rightarrow$ *Punktprobe von Q in g!*

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ und einsetzen und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ an die Stelle von $\vec{X}$ und λ prüfen:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \lambda = -2 \\ \Rightarrow \lambda = -2 \\ \Rightarrow \lambda = -2 \end{matrix}$$

Ergebnis: Der Punkt Q liegt auf der Geraden g!

Liegt Q in E? $\Rightarrow$ *Punktprobe von Q in E!*

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $Q(-4|5|7)$ in die KF(E):

$$-2 \cdot (-4) + 5 + 3 \cdot 7 - 6 = 0$$
$$28 = 0$$

$\Longrightarrow$ Einsetzen des Punktes Q in E führt zum Widerspruch
$\Longrightarrow$ Q liegt nicht in E

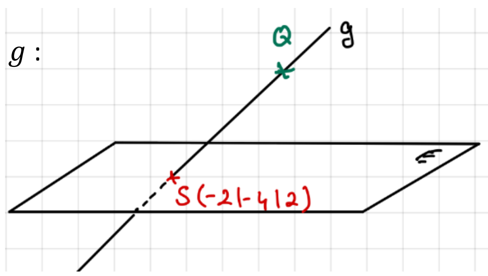
Lage von g bzgl. E? $\Rightarrow$ *allgemeiner Geradenpunkt von g in E!*

$$-2 \cdot (0 - 2\lambda) + (-13 + 9\lambda) + 3 \cdot (-3 + 5\lambda) - 6 = 0$$
$$4\lambda - 13 + 9\lambda - 9 + 15\lambda - 6 = 0$$
$$28\lambda - 28 = 0 \qquad \boxed{\Rightarrow \lambda = 1}$$

Ergebnis:
Der Einsetzvorgang prüft, ob es gemeinsame Punkte zwischen Gerade und Ebene gibt. Wir stellen fest, dass die entstandene Gleichung für $\lambda = 1$ eine wahre Aussage liefert und damit genau eine Lösung existiert. Es gibt also einen Schnittpunkt S!

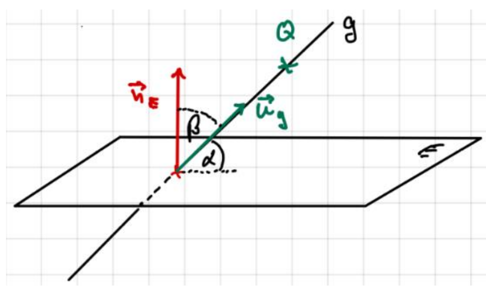
Schnittpunkt S bestimmen:
Den Schnittpunkt S erhalten wir durch Einsetzen von $\lambda = 1$ in g:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

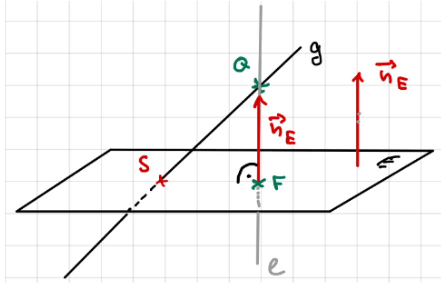


d) Bestimme den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{|4+9+15|}{\sqrt{\{110\}} \cdot \sqrt{\{8\}}}\right) \approx 70{,}71°$$



e) Bestimme den Abstand des Punktes Q von der Ebene E.



* Erstelle eine Lotgerade l zur Ebene E
* durch den Punkt Q mit Richtungsvektor $\overrightarrow{n_E}$
* Die Gerade l schneidet die Ebene E im Punkt F
* F heißt auch Lotfußpunkt von Q in F
* Abstand von Q zu E: $d(Q;E) = |\overrightarrow{QF}|$

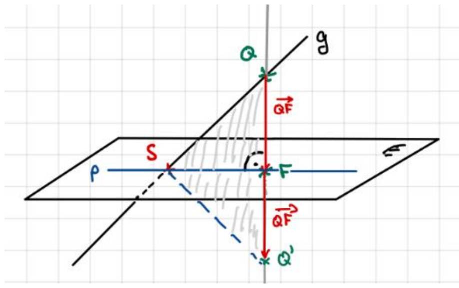
Lotgerade: $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

l in E: $-2(-4-2\tau) + (5+\tau) + 3(7+3\tau) - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = -2$

$\lambda = -2$ in l: $\vec{F} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow F(0|3|1)$

Abstand von Q zu E: $d(Q;E) = |\overrightarrow{QF}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+4+36} = 2\sqrt{14}$

f) Berechne die senkrechte Projektion p der Geraden g in die Ebene E den Spiegelpunkt Q' von Q an der Ebene E und den Flächeninhalt vom Dreieck $\Delta\, SQ'Q$.



Senkrechte Projektion: $p: \vec{X} = \vec{S} + \sigma \cdot \overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in R$

Spiegelpunkt Q': $\overrightarrow{Q'} = \vec{Q} + 2 \cdot \overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Fläche vom Dreieck $\Delta\, SQ'Q$ $\quad A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{SF}| \cdot |\overrightarrow{QF}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{62} \cdot 2\sqrt{14} = 4\sqrt{217}$