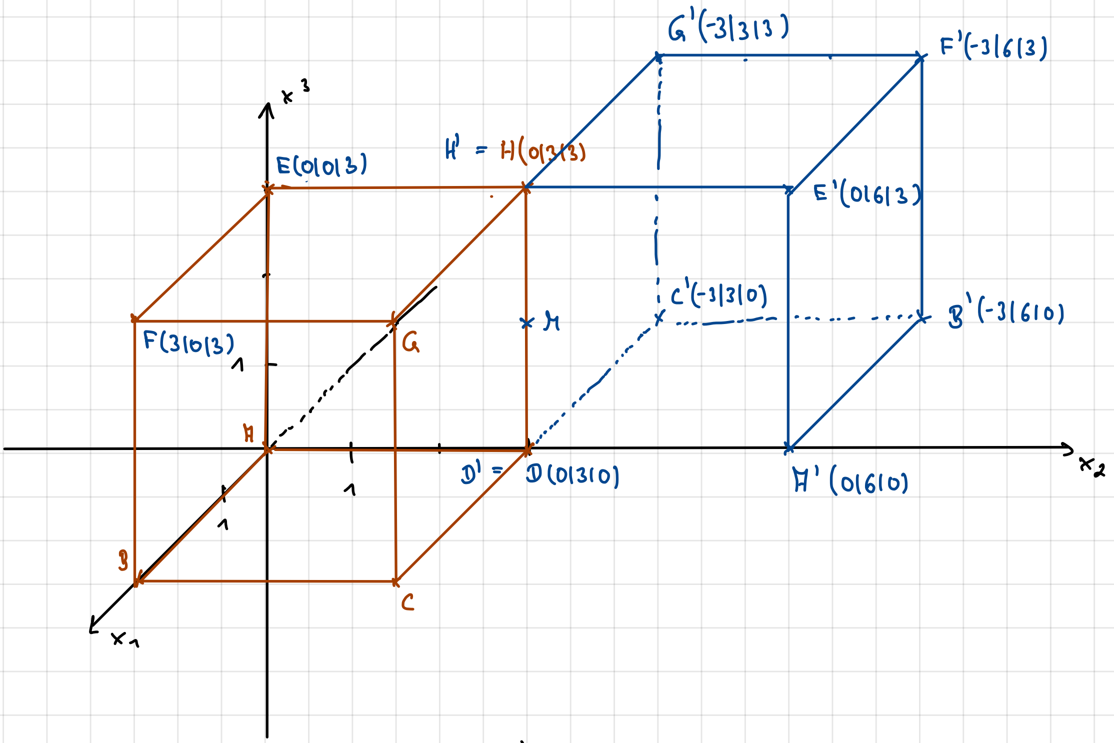
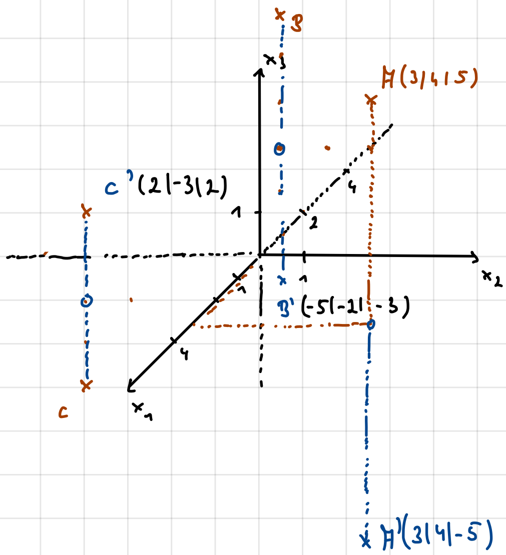
# Lösungen zu Übung 2 - Grundlagen

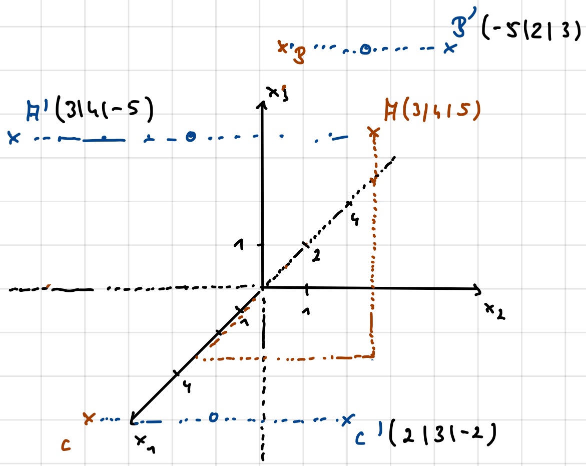
1.

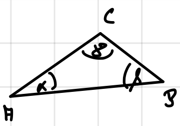



b) $\vec{M} = \vec{D} + \frac{1}{2} \cdot \vec{DH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow M(0|3|1{,}5)$

2.




3. $A(3|1|-4)$ $B(5|-1|-3)$ $C(-1|2|-1)$

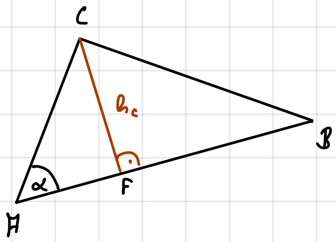
$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{-8-2+3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{26}} = \dfrac{-7}{3 \cdot \sqrt{26}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-7}{3 \cdot \sqrt{26}}\right) \approx 117{,}23°$

$\vec{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\cos\beta = \dfrac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{12+6-2}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{49}} = \dfrac{16}{3 \cdot 7} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{16}{21}\right) \approx 40{,}37°$

$\Rightarrow \gamma = 180° - 117{,}23° - 40{,}37° = 22{,}4°$

$U = |\vec{AB}| + |\vec{AC}| + |\vec{BC}| = 3 + \sqrt{26} + 7 = 10 + \sqrt{26}$

4. $A(1|2|-1)$ ; $B(5|2|2)$ , $C(3|0|-2)$




<u>1. Weg</u>: Elementargeometrie

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{8+0-3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{25}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{15}\right) \approx 70{,}53°$$

$\Rightarrow$ $h_c$ ist die Gegenkathete zu $\alpha$ im Dreieck AFC

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{|\vec{AC}|} \Rightarrow h_c = \sin 70{,}53° \cdot 3 \approx 2{,}83 \text{ LE}$$

$$\Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot h_c = 7{,}07 \text{ FE}$$

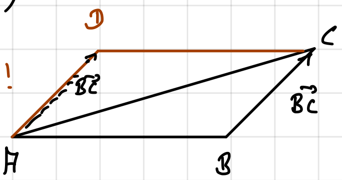
<u>2. Weg</u>: Vektorgeometrie (Flächenberechnung von $\Delta ABC$ mit Kreuzprodukt)

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{AC} \times \vec{AB} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -6+0 \\ -4-6 \\ 0+8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36+100+64} \approx 7{,}07 \text{ FE}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} g \cdot h_c \Rightarrow h_c = \frac{7{,}07 \cdot 2}{\underbrace{|\vec{AB}|}_{5}} \approx 2{,}83 \text{ LE}$$

5. $A(-2|-3|2)$ $B(1|1|3)$ $C(1|2|5)$

Eine Möglichkeit!




$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow D(-2|-2|4)$

6. <u>Merke:</u> Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht zueinander, wenn deren Skalarprodukt gleich 0 ist.

$A(1|2|0)$ $B(3|1|2)$ $C(0|4|2)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \circ \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2-2+4 = 0$$

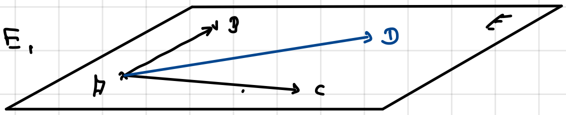
q.e.d.

7. $$\begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3t - 2t + 9 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t = -9$$

Muss 0 sein, da die Vektoren senkrecht zueinander verlaufen sollen!

7. $A(1|2|0)$ $\quad B(3|1|2)$ $\quad C(0|4|2)$ $\quad D(1|2|-3)$

Die Punkte liegen in einer Ebene E, wenn z.B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ den Vektor $\overrightarrow{AD}$ über eine Linearkombination darstellen können.




$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \overrightarrow{AB} + l \cdot \overrightarrow{AC} \overset{!}{=} \overrightarrow{AD}$$

$$\begin{aligned} &\text{I}, && 2k - 1l = 0 && \Rightarrow \quad l = 2k \\ &\text{II}, && -k + 2l = 0 && \Rightarrow \quad l = \tfrac{1}{2}k \\ &\text{III}, && 2k + 2l = -3 && \end{aligned}$$

↯ Die Punkte liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene!